Cryptographie

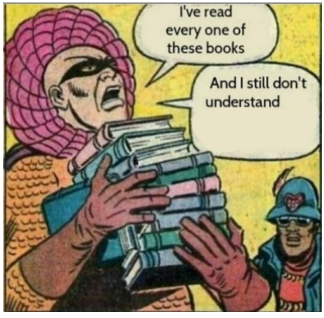
Introduction : définitions de sécurité & méthodes de preuves

Léo Colisson Palais
Master CSI 2024 – 2025

leo.colisson-palais@univ-grenoble-alpes.fr

https://leo.colisson.me/teaching.html

Quelques réferences

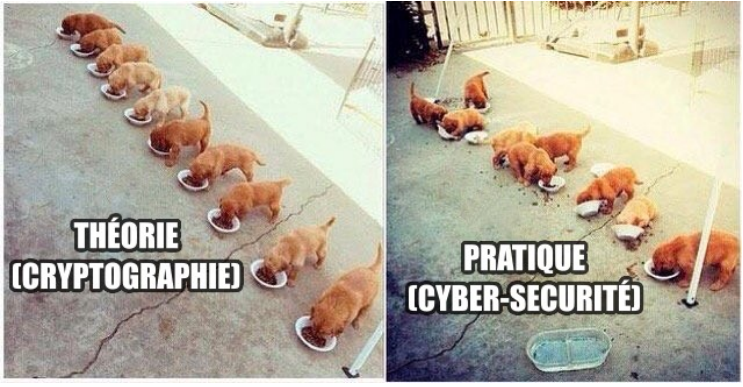


- Base de ce cours :
  The Joy of Cryptography, Mike Rosulek
  `https://joyofcryptography.com/`
- *Introduction to Modern Cryptography*, Jonathan Katz & Yehuda Lindell
- *Foundation of Cryptography*, Oded Goldreich

Planning

- 1 journée le 16 mai
- 3 journées du 18 au 20 juin

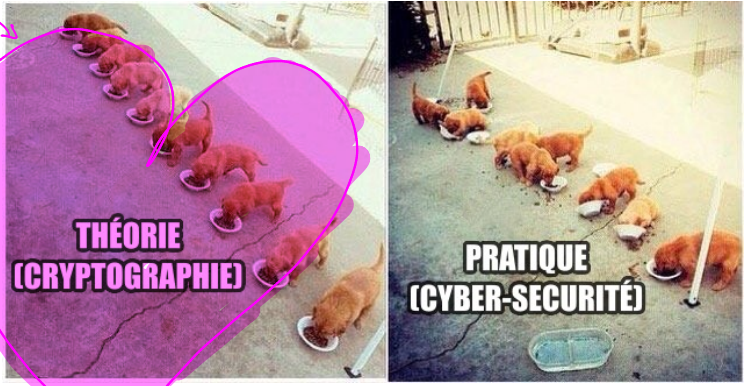
Cryptographie vs cyber-sécurité



Inspiré par `https://x.com/WauteletB/status/700980326215065600/photo/1`

Cryptographie vs cyber-sécurité

Coeur avec les doigts = ce cours



Inspiré par https://x.com/WauteletB/status/700980326215065600/photo/1

Buts

Buts:

- Ouvrir les boites : **comment sont définies** les primitives cryptographiques ?

https://www.youtube.com/watch?v=a_HIHG5Nvpk
(légèrement améliorée)

Buts

Buts:

- Ouvrir les boites : **comment sont définies** les primitives cryptographiques ?
- Définir précisément ce **que veut dire “sécurisé”** : modèles, hypothèses, définitions…

https://www.youtube.com/watch?v=a_HIHG5Nvpk
(légèrement améliorée)

Buts

Buts:

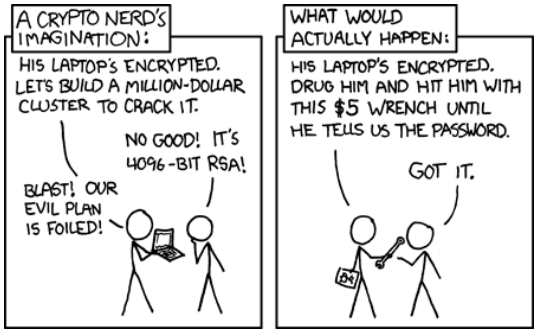
- Ouvrir les boites : **comment sont définies** les primitives cryptographiques ?
- Définir précisément ce **que veut dire “sécurisé”** : modèles, hypothèses, définitions…
- Comment **écrire des preuves de sécurité** formellement ?

https://www.youtube.com/watch?v=a_HIHG5Nvpk
(légèrement améliorée)

Buts

Buts:

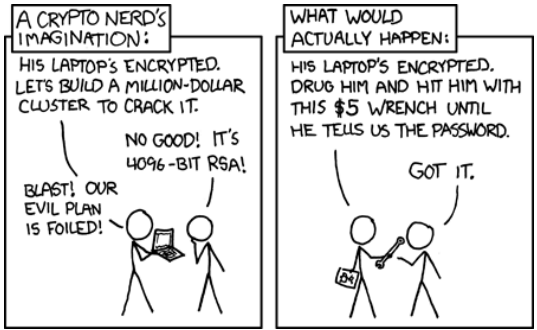
- Ouvrir les boites : **comment sont définies** les primitives cryptographiques ?
- Définir précisément ce **que veut dire "sécurisé"** : modèles, hypothèses, définitions...
- Comment **écrire des preuves de sécurité** formellement ?
- Comprendre les **implications de ces modèles** ?



Buts

Buts:

- Ouvrir les boites : **comment sont définies** les primitives cryptographiques ?
- Définir précisément ce **que veut dire "sécurisé"** : modèles, hypothèses, définitions...
- Comment **écrire des preuves de sécurité** formellement ?
- Comprendre les **implications de ces modèles** ?
- Les choses à **ne pas faire** !!



Cours moodle associé

`https://moodle.caseine.org/course/view.php?id=1317`

⇒ Faire le quiz

Notations

Notation	Signification
$x \xleftarrow{\$} X$	x est un élément aléatoire uniformément tiré dans l'ensemble X
$y \leftarrow A(x)$	Si A est un algorithme probabiliste ou une distribution, on exécute A sur l'entrée x et enregistre le résultat dans x
$x \stackrel{?}{=} y$	Retourne 1 (vrai) si x est égal à y, 0 (faux) sinon
$\mathrm{negl}(\lambda)$	Une fonction arbitraire f qui est négligeable (= plus petite que n'importe quel polynôme), i.e. $\forall c \in \mathbb{N}, \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^c f(\lambda) = 0$
$\mathrm{poly}(\lambda)$	Fonction arbitraire f plus petite qu'un polynôme, i.e. $\exists c \in N, N \in N, \forall \lambda > N, f(\lambda) \leq \lambda^c$

Quelles fonctions sont négligeables ?

A $f(\lambda) = \frac{1}{2^\lambda}$

B $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1000}}$

C $f(\lambda) = 2^{-\log \lambda}$

Notations

Notation	Signification
$x \xleftarrow{\$} X$	x est un élément aléatoire uniformément tiré dans l'ensemble X
$y \leftarrow A(x)$	Si A est un algorithme probabiliste ou une distribution, on exécute A sur l'entrée x et enregistre le résultat dans x
$x \stackrel{?}{=} y$	Retourne 1 (vrai) si x est égal à y, 0 (faux) sinon
$\text{negl}(\lambda)$	Une fonction arbitraire f qui est négligeable (= plus petite que n'importe quel polynôme), i.e. $\forall c \in \mathbb{N}, \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^c f(\lambda) = 0$
$\text{poly}(\lambda)$	Fonction arbitraire f plus petite qu'un polynôme, i.e. $\exists c \in N, N \in N, \forall \lambda > N, f(\lambda) \leq \lambda^c$

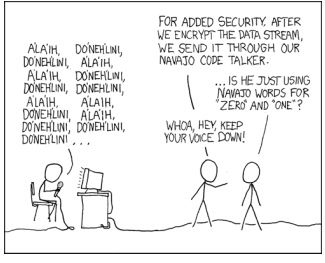
NB: $\text{negl}(\lambda) + \text{negl}(\lambda) = \text{negl}(\lambda)$, $\text{negl}(\lambda) \times \text{negl}(\lambda) = \text{negl}(\lambda)$, $\text{poly}(\lambda)\text{negl}(\lambda) = \text{negl}(\lambda)$

Sécurisé ? C’est à dire ?

Exemple du chiffrement symétrique

Principe de Kerckhoffs

L'adversaire connait tous les détails du protocole (mais ne peut pas connaître directement les valeurs tirées au sort lors de l'exécution du protocole)



Chiffrement symétrique vs asymétrique

= à clé privée

Chiffrement symétrique

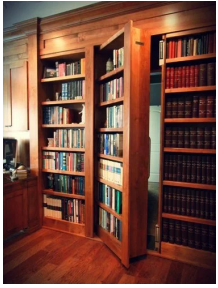
Les deux participants partagent le même secret

≠

= à clé publique

Chiffrement asymétrique

Une personne a une information additionnelle (**porte dérobée**) qui permet d'inverser une fonction facilement



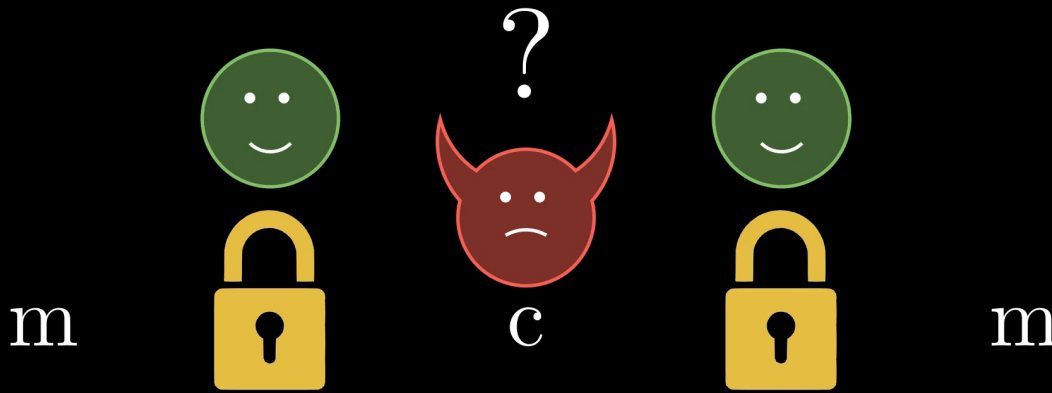


m

m

c


?
m
c


?
m
c
m

Cryptographie symétrique vs asymétrique

Chiffrement asymétrique

- 😀 Pas besoin d'échanger de secrets (e.g. internet)
- 😰 Hypothèses plus fortes factorisation, LWE… (fonctions très structurées)
- 😰 Moins efficace
- 😰 Pas de sécurité statistique

Chiffrement symétrique

- 😰 Doit partager des secrets
- 😀 Plus faibles hypothèses (moins de structure)
- 😀 Plus efficace
- 😀 Sécurité statistique possible (mais pas pratique)

⇒ Systèmes hybrides: **combiner les deux** = meilleur des deux mondes (efficace + pas de secret à distribuer)

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

“Le protocole XXX est **securisé**

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

“Le protocole XXX est **securisé** en supposant que YYY est difficile.”

Hypothèse calculatoire = qu’est-ce qui est supposé dur pour l’attaquant ?
E.g. DDH, factorisation, LWE…

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

Hypothèse de setup = à quoi ont accès les participants honnêtes et malicieux (e.g. oracle modélise/remplace une fonction de hash)

“Le protocole XXX est **securisé** dans le modèle plain/CRS/RO en supposant que YYY est difficile.”

Hypothèse calculatoire = qu’est-ce qui est supposé dur pour l’attaquant ? E.g. DDH, factorisation, LWE…

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

Hypothèse de setup = à quoi ont accès les participants honnêtes et malicieux (e.g. oracle modélise/remplace une fonction de hash)

"Le protocole XXX est **securisé** dans le modèle plain/CRS/RO en supposant que YYY est difficile."

???

Hypothèse calculatoire = qu'est-ce qui est supposé dur pour l'attaquant ? E.g. DDH, factorisation, LWE…

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

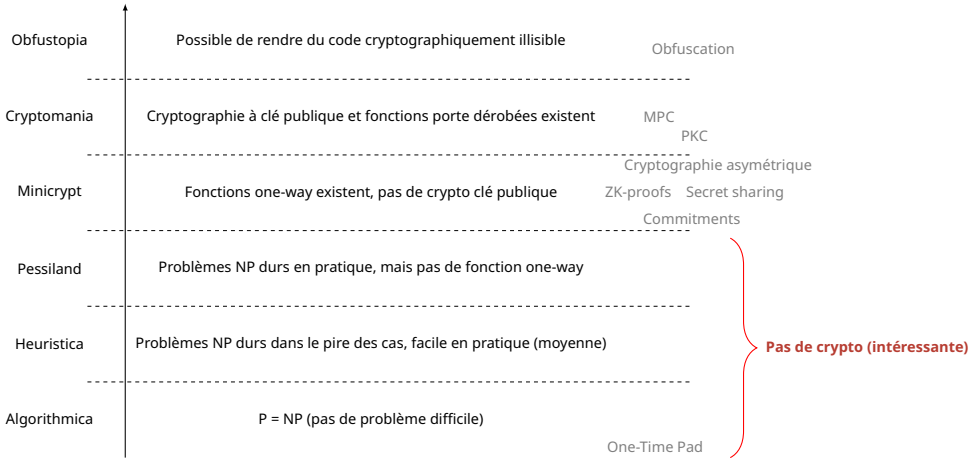
Hypothèse de setup = à quoi ont accès les participants honnêtes et malicieux
(e.g. oracle modélise/remplace une fonction de hash)

“Le protocole XXX est **securisé** dans le modèle plain/CRS/RO en supposant que YYY est difficile.”

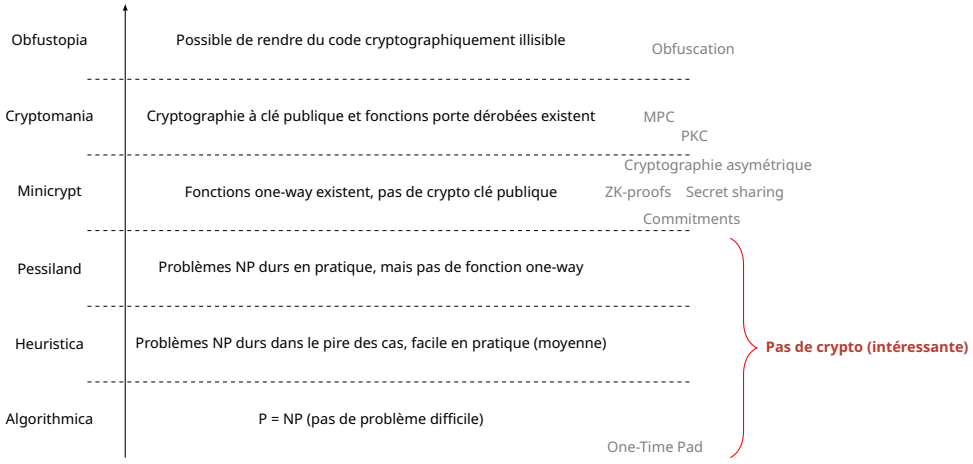
Modèle de sécurité = garanties (à prouver) en terme de sécurité
E.g. intuitivement “l’adversaire est incapable de trouver le message”

Hypothèse calculatoire = qu’est-ce qui est supposé dur pour l’attaquant ?
E.g. DDH, factorisation, LWE…

Hypothèses de sécurité : les mondes d'Impagliazzo

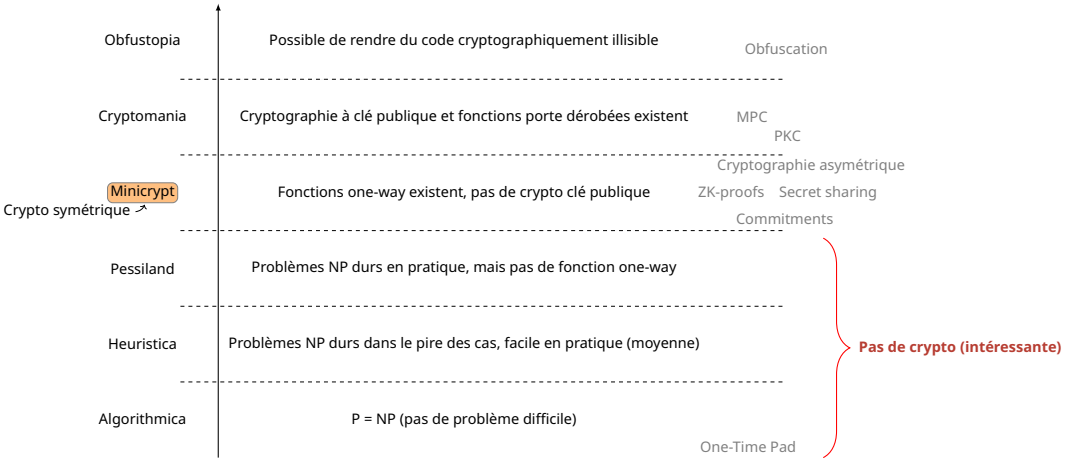


Hypothèses de sécurité : les mondes d'Impagliazzo



Grande question (plus dure que $P = NP$) : dans quel monde sommes nous ?

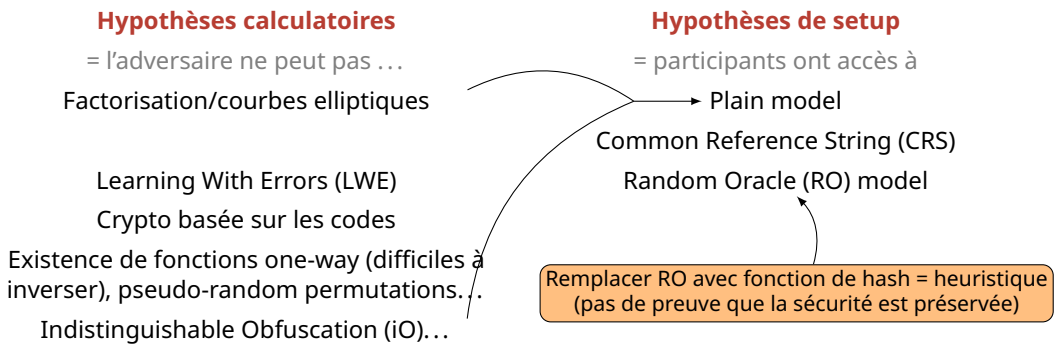
Hypothèses de sécurité : les mondes d'Impagliazzo



Grande question (plus dure que $P = NP$) : dans quel monde sommes nous ?

Pas de sécurité absolue

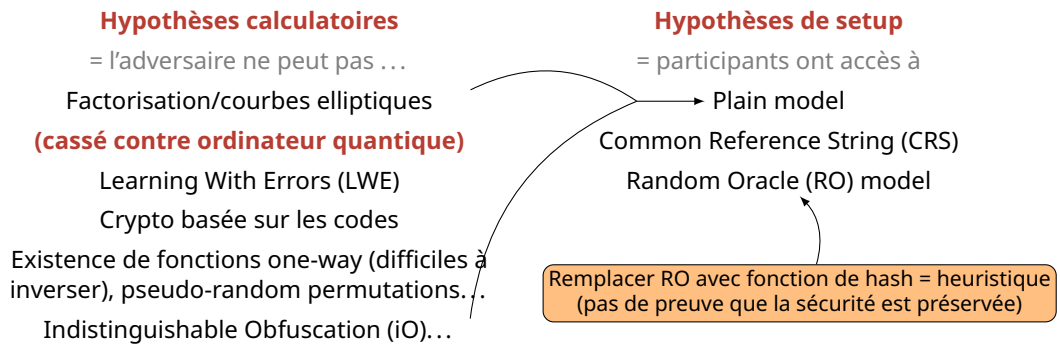
Puisque l'on ne sait pas dans quel monde on est = **pas de sécurité inconditionnelle** (sauf One-Time Pad) $\Rightarrow$ toujours besoin **d'hypothèses**:



Important de **clairement l'indiquer** et de comprendre leurs implications!

Pas de sécurité absolue

Puisque l'on ne sait pas dans quel monde on est = **pas de sécurité inconditionnelle** (sauf One-Time Pad) $\Rightarrow$ toujours besoin **d'hypothèses**:



Important de **clairement l'indiquer** et de comprendre leurs implications!

Modèles de sécurité

Quand on créé un système cryptographique, on souhaite dire:

Hypothèse de setup = à quoi ont accès les participants honnêtes et malicieux
(e.g. oracle modélise/remplace une fonction de hash)

“Le protocole XXX est **securisé** dans le modèle plain/CRS/RO en supposant que YYY est difficile.”

Modèle de sécurité = garanties (à prouver) en terme de sécurité
E.g. intuitivement “l’adversaire est incapable de trouver le message”

Hypothèse calculatoire = qu’est-ce qui est supposé dur pour l’attaquant ?
E.g. DDH, factorisation, LWE…

Modèles de sécurité

Facile de dire intuitivement ce que l'on souhaite **difficile de trouver un bon modèle** de sécurité qui capture touts les comportements indésirables :

E.g. pour chiffrement :

Essai 1 : "Étant donné un chiffrement de m, un adversaire doit être incapable de trouver m". Est-ce une bonne définition de sécurité ? (si non, trouver un contre exemple)

A. Oui
B. Non

Modèles de sécurité

Facile de dire intuitivement ce que l'on souhaite **difficile de trouver un bon modèle** de sécurité qui capture touts les comportements indésirables :

E.g. pour chiffrement :

Essai 1 : "Étant donné un chiffrement de m, un adversaire doit être incapable de trouver m". Est-ce une bonne définition de sécurité ? (si non, trouver un contre exemple)

A. Oui ✗

B. Non ✓ Être capable de récupérer 3/4 du message est déjà un gros problème ! E.g.
$m =$ `"????????????, donc nous attaquons demain"`

Security models

Essai 2 : “Étant donne un chiffrement de m, un adversaire devrait être incapable de retrouver un seul bit de m”. Est-ce une bonne définition de sécurité ? (si non, trouver un contre exemple)

A. Oui
B. Non

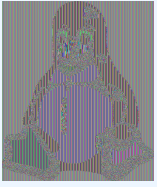
Security models

Essai 2 : “Étant donne un chiffrement de m, un adversaire devrait être incapable de retrouver un seul bit de m”. Est-ce une bonne définition de sécurité ? (si non, trouver un contre exemple)

?

A Oui ✗

B Non ✓ Savoir quels groupes de bits diffèrent donne beaucoup d’info :



NE JAMAIS FAIRE ÇA

UN CHIFFREMENT DOIT TOUJOURS ÊTRE NON-DETERMINISTE!!!

https://pieropan.ca/portfolio/a-ne-pas-faire-a-la-maison/

NE JAMAIS FAIRE ÇA

UN CHIFFREMENT DOIT TOUJOURS ÊTRE NON-DETERMINISTE!!!

NE FAITES JAMAIS VOTRE PROPRE CHIFFREMENT, IL SERA NON SÉCURISÉ!!!

https://pieropan.ca/portfolio/a-ne-pas-faire-a-la-maison/

Meilleure solution

Plutôt que de demander à ce que l'adversaire soit incapable d'apprendre XXX sur m à partir de $\text{Enc}_k(m)$,

Mieux de dire qu'il est **incapable de distinguer** entre $\text{Enc}_k(m_0)$ et $\text{Enc}_k(m_1)$ pour m_0 et m_1 qu'il a choisit.

Ça **implique** en particulier qu'il est incapable d'apprendre XXX, sinon il pourrait choisir m_0 et m_1 avec XXX différent, récupérer XXX à partir de $\text{Enc}_k(m_b)$, et déterminer b en fonction de XXX.

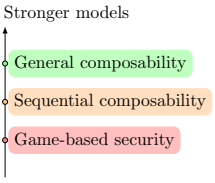
Comment formaliser cette intuition ?

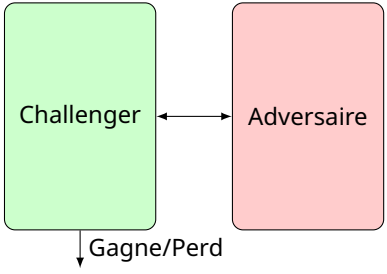
Modèles de sécurité

Mais alors, comment définir un protocole/chiffrement sécurisé ? $\Rightarrow$ Il n'y a pas une, mais plusieurs définitions de sécurité (avec des garanties différentes)

3 **classes** de modèles de sécurité :

1: Sécurité basée sur les jeux = Fixe un **challenger** (définit la sécurité) :





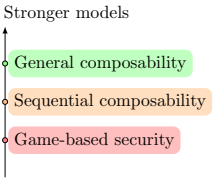
Sécurisé si pour chaque adversaire, **la probabilité de gagner est "basse"**
(souvent $1/2 + \mathrm{negl}(\lambda)$ ou $0 + \mathrm{negl}(\lambda)$ suivant le jeu)

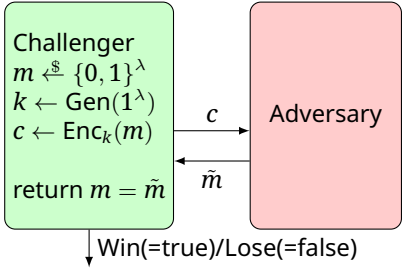
Modèles de sécurité

Mais alors, comment définir un protocole/chiffrement sécurisé ? ⇒ Il n'y a pas une, mais plusieurs définitions de sécurité (avec des garanties différentes)

3 **classes** de modèles de sécurité :

1: Sécurité basée sur les jeux = Fixe un **challenger** (définit la sécurité) :





Sécurisé si pour chaque adversaire, **la probabilité de gagner est "basse"**
(souvent $1/2 + \mathsf{negl}(\lambda)$ ou $0 + \mathsf{negl}(\lambda)$ suivant le jeu)

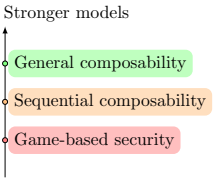
Modèles de sécurité

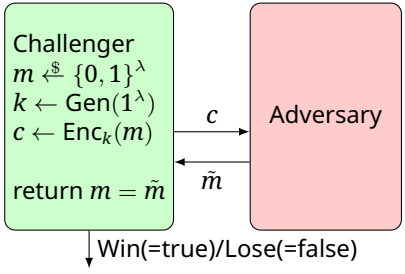
Mais alors, comment définir un protocole
plusieurs définitions de sécurité (avec des

Q: Est-ce que ce challenger correspond à la définition:
(A) “n’apprends pas m”
(B) ou “n’apprends aucun bit sur m”?

3 **classes** de modèles de sécurité :

1: Sécurité basée sur les jeux = Fixe un **challenger** (définit la sécurité) :



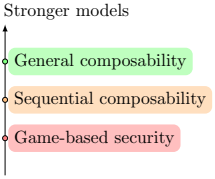


Sécurisé si pour chaque adversaire, **la probabilité de gagner est “basse”**
(souvent $1/2 + \mathrm{negl}(\lambda)$ ou $0 + \mathrm{negl}(\lambda)$ suivant le jeu)

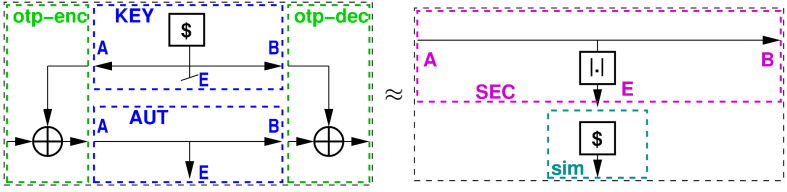
Modèles de sécurité

Mais alors, comment définir un protocole/chiffrement sécurisé ? ⇒ Il n'y a pas une, mais plusieurs définitions de sécurité (avec des garanties différentes)

3 **classes** de modèles de sécurité :



2 & 3: Frameworks composables = sécurité basée sur un **simulateur** qui traduit les attaques du monde réel pour attaquer une **fonctionalité** (personne tierce de confiance) dans un monde idéal, supposé sécurisé par définition :



Principaux frameworks : standalone security (sequential), Universal Composability [Can10], Abstract Crytography [MR11,M12] (general)

Modèles de sécurité : comparaison

	Sécurité basée sur les jeux	Sécurité composable/ basée sur la simulation
Simple à comprendre	✓	✗
Simple de voir que c'est la "bonne" définition	✗	✓
Garanties plus fortes	✗	✓
Notions particulièrement adaptées au modèle	Signatures	MPC
Garanties quand les protocoles sont composés	✗	✓
Résultats d'impossibilité sont rares	✓	✗
Exemple de définition équivalentes	IND-CPA	Semantic-security

Modèles de sécurité : comparaison

Focus de ce cours

	Sécurité basée sur les jeux	Sécurité composable/ basée sur la simulation
Simple à comprendre	✓	✗
Simple de voir que c'est la "bonne" définition	✗	✓
Garanties plus fortes	✗	✓
Notions particulièrement adaptées au modèle	Signatures	MPC
Garanties quand les protocoles sont composés	✗	✓
Résultats d'impossibilité sont rares	✓	✗
Exemple de définition équivalentes	IND-CPA	Semantic-security

[GM84]

Sécurité basée sur les jeux

Le challenger modélise ce que l'adversaire est autorisé à faire et ce qui est considéré comme « mauvais » en termes de sécurité :

- Quels messages/fonctions l'adversaire peut-il lire/appeler ?
- Adversaire passif (= écouteur) ou actif (= man in the middle) ?
- Boîte noire ou accès physique à l'appareil ?
  - Attaques par canaux auxiliaires (= enregistrement de la consommation électrique, du bruit…)
  - Attaques par faute (ex. : envoi d'ondes magnétiques pour perturber un circuit…)
- Que doit-on garder secret ? (en fonction de la valeur de retour du challenger)

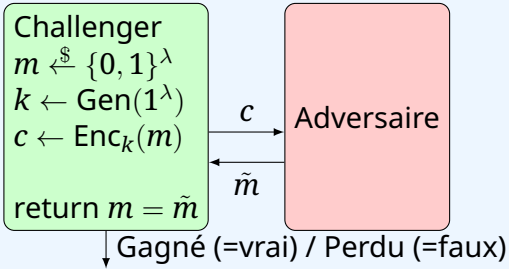
Questions

Ceci modélise :

A. un adversaire passif,

B. un adversaire actif ?

?

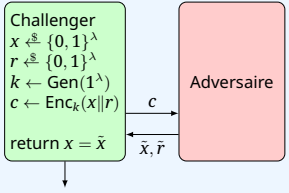


Questions

Supposons que pour tout adversaire $\mathcal{A}$, la probabilité de gagner ce jeu est négligeable. Traduire les implications en français :

- A La probabilité de retrouver **entièrement** un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est négligeable
- B La probabilité de retrouver la **première moitié** d'un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est nulle
- C La probabilité de retrouver la **première moitié** de **n'importe quel** message à partir d'un chiffré est nulle

?

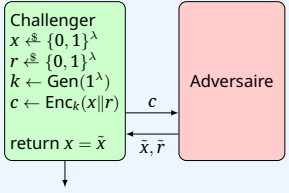


Questions

Supposons que pour tout adversaire $\mathcal{A}$, la probabilité de gagner ce jeu est négligeable. Traduire les implications en français :

- A La probabilité de retrouver **entièrement** un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est négligeable
- B La probabilité de retrouver la **première moitié** d'un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est nulle ✓
- C La probabilité de retrouver la **première moitié** de **n'importe quel** message à partir d'un chiffré est nulle

?



Questions

Supposons que pour tout adversaire $\mathcal{A}$, la probabilité de gagner ce jeu est négligeable. Traduire les implications en français :

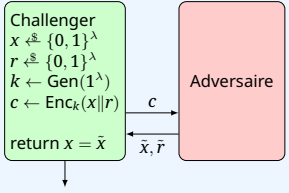
A. La probabilité de retrouver **entièrement** un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est négligeable

B. La probabilité de retrouver la **première moitié** d'un message **aléatoire** à partir d'un chiffré est nulle ✓

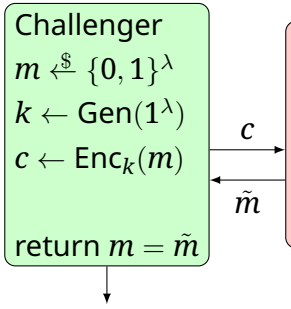
?

C. La probabilité de retrouver la **première moitié** de **n'importe quel** message à partir d'un chiffré est nulle

Il est donc peut-être facile de déchiffrer "Oui" et "Non" mais pas les autres messages!

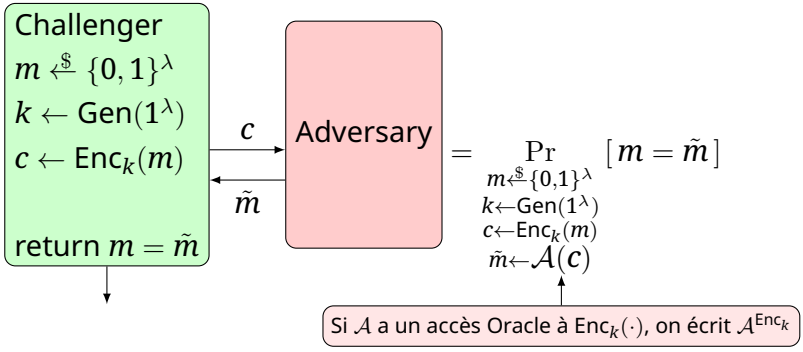


Equivalent notations/formulations

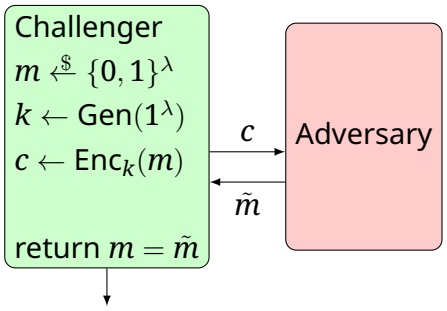


$$= \Pr_{\substack{m \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda \\ k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda) \\ c \leftarrow \mathsf{Enc}_k(m) \\ \tilde{m} \leftarrow \mathcal{A}(c)}} [\, m = \tilde{m} \,]$$

Equivalent notations/formulations



Equivalent notations/formulations

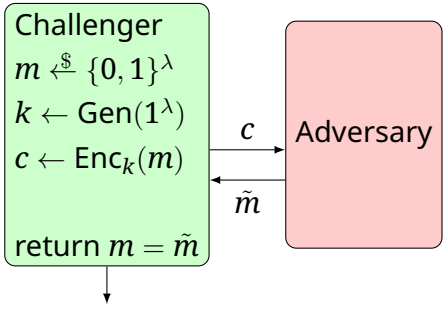


$$= \Pr_{\substack{m \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda \\ k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda) \\ c \leftarrow \mathsf{Enc}_k(m) \\ \tilde{m} \leftarrow \mathcal{A}(c)}} [m = \tilde{m}] = \Pr_{\substack{m \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda \\ \tilde{m} \leftarrow \mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_m}} [m = \tilde{m}]$$

$\mathcal{L}_m$
$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$
$c \leftarrow \mathsf{Enc}_k(m)$
GETC():
return c

$\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}$ signifie que $\mathcal{A}$ as un accès oracle à $\mathcal{L}$ (= librairie), comme $\mathcal{A}^{\mathcal{L}}$ mais cette notation est utilisée dans *Joy of cryptography* et est pratique lorsque l'on chaine plusieurs librairies.

Equivalent notations/formulations



$$= \Pr_{\substack{m \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda \\ k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda) \\ c \leftarrow \mathsf{Enc}_k(m) \\ \tilde{m} \leftarrow \mathcal{A}(c)}} [m = \tilde{m}] = \Pr_{\substack{m \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda \\ \tilde{m} \leftarrow \mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_m}} [m = \tilde{m}]$$

$\mathcal{L}_m$

$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$
$c \leftarrow \mathsf{Enc}_k(m)$
GETC():
return c

Veurbeux, dure à manipuler formellement

Plus standard mais souvent difficile à manipuler et vérifier formellement

Modèle de *Joy of cryptography*: **plus facile** à ré-utiliser et écrire/vérifier des preuves (dépendances explicites, petites réductions faciles à vérifier)

Mais **fondamentalement identique**, juste la présentation qui diffère !

Exercice évaluation de librairie

On considère les deux librairies suivantes :

$\mathcal{A}_1$
$r_1 \leftarrow \mathsf{RAND}(6)$
return $r_1 \stackrel{?}{=} 4$

$\mathcal{L}_1$
$\mathsf{RAND}(n)$:
$r \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_{\lceil n/2 \rceil}$
return $2r$

Quelle est la valeur de $\Pr[\mathcal{A}_1 \diamond \mathcal{L}_1 = 1]$[a] ?

- A 0
- B 1/6
- C 1/3
- D 1

[a] À partir de maintenant, on définit true $= 1$ et false $= 0$.

Exercice évaluation de librairie

On considère les deux librairies suivantes :

$\mathcal{A}_1$
$r_1 \leftarrow \mathsf{RAND}(6)$
return $r_1 \stackrel{?}{=} 4$

$\mathcal{L}_1$
$\mathsf{RAND}(n)$:
$r \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_{\lceil n/2 \rceil}$
return $2r$

Quelle est la valeur de $\Pr[\mathcal{A}_1 \diamond \mathcal{L}_1 = 1]$[a] ?

- A 0
- B 1/6
- C 1/3 ✓
- D 1

[a] À partir de maintenant, on définit true $= 1$ et false $= 0$.

Exercice des librairies bien définies

On considère les deux librairies suivantes : Quelle est la valeur de $\Pr[\mathcal{A}_1 \diamond \mathcal{L}_1 = 1]$?

A. 0
B. 1/2
C. 1
D. Ce n'est pas bien définit pour une raison
E. Ce n'est pas bien définit pour deux raisons

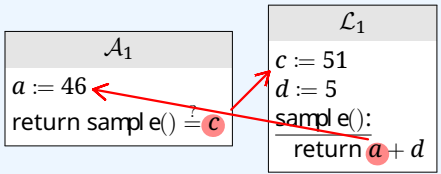
$\mathcal{A}_1$
$a \coloneqq 46$ return sample() $\stackrel{?}{=} c$

$\mathcal{L}_1$
$c \coloneqq 51$ $d \coloneqq 5$ sample():   return $a + d$

Exercice des librairies bien définies

On considère les deux librairies suivantes : Quelle est la valeur de $\Pr[\mathcal{A}_1 \diamond \mathcal{L}_1 = 1]$?

- A 0
- B 1/2
- C 1
- D Ce n'est pas bien définit pour une raison
- E Ce n'est pas bien définit pour deux raisons ✓



Sécurité basée sur les jeux : puissance de l'adversaire

On peut aussi modéliser la puissance d'un adversaire (généralement modélisé comme une machine de Turing) dans la quantification de l'adversaire :

- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **non borné**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité statistique
- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **borné polynomialement**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité calculatoire

Si le temps d'exécution de $\mathcal{A}(n)$ est $\sqrt{n}$, $\mathcal{A}$ est-elle polynomiale ?

A. Oui

B. Non

Sécurité basée sur les jeux : puissance de l'adversaire

On peut aussi modéliser la puissance d'un adversaire (généralement modélisé comme une machine de Turing) dans la quantification de l'adversaire :

- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **non borné**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité statistique
- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **borné polynomialement**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité calculatoire

Si le temps d'exécution de $\mathcal{A}(n)$ est $\sqrt{n}$, $\mathcal{A}$ est-elle polynomiale ?

A. Oui ✗

B. Non ✓ Elle doit s'exécuter en temps polynomial en la **taille** ($\log(n)$) de l'entrée (sinon, la factorisation devient efficace !)

Sécurité basée sur les jeux : puissance de l'adversaire

On peut aussi modéliser la puissance d'un adversaire (généralement modélisé comme une machine de Turing) dans la quantification de l'adversaire :

- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **non borné**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité statistique
- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **borné polynomialement**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité calculatoire

Si le temps d'exécution de $\mathcal{A}(1^\lambda)$ est λ^2, $\mathcal{A}$ est-elle polynomiale ?

A. Oui

B. Non

Sécurité basée sur les jeux : puissance de l'adversaire

On peut aussi modéliser la puissance d'un adversaire (généralement modélisé comme une machine de Turing) dans la quantification de l'adversaire :

- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **non borné**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité statistique
- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **borné polynomialement**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité calculatoire

Si le temps d'exécution de $\mathcal{A}(1^\lambda)$ est λ^2, $\mathcal{A}$ est-elle polynomiale ?

A Oui ✓ car l'argument est spécifié en format unaire $1 \ldots 1$

B Non

Sécurité basée sur les jeux : puissance de l'adversaire

On peut aussi modéliser la puissance d'un adversaire (généralement modélisé comme une machine de Turing) dans la quantification :

Qu'est-ce que « faible » ?

- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **non borné**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité statistique
- "Pour tout adversaire $\mathcal{A}$ **borné polynomialement**, la probabilité de gagner est faible" = sécurité calculatoire

---

? Si le temps d'exécution de $\mathcal{A}(1^\lambda)$ est λ^2, $\mathcal{A}$ est-elle polynomiale ?

A Oui ✓ car l'argument est spécifié en format unaire $1 \ldots 1$

B Non

Recherche vs décision

Définition de “faible” = dépend du challenger, mais on distingue typiquement deux cas :

- **Problème de recherche** : l’adversaire doit retrouver une **chaîne de bits** (e.g. “décrypter ce message”) : faible $= \text{negl}(\lambda)$
- **Problème de décision** : l’adversaire doit retrouver un **bit unique** b (e.g. “est-ce un chiffré de m_0 ou m_1 ?”) : faible $= 1/2 + \text{negl}(\lambda)$

Recherche vs décision

Définition de “faible” = dépend du challenger, mais on distingue typiquement deux cas :

- **Problème de recherche** : l’adversaire doit retrouver une **chaîne de bits** (e.g. “décrypter ce message”) : faible $= \text{negl}(\lambda)$
- **Problème de décision** : l’adversaire doit retrouver un **bit unique** b (e.g. “est-ce un chiffré de m_0 ou m_1 ?”) : faible $= 1/2 + \text{negl}(\lambda)$

Recherche vs décision

Définition de “faible” = dépend du challenger, mais on distingue typiquement deux cas :

- **Problème de recherche** : l’adversaire doit retrouver une **chaîne de bits** (e.g. “décrypter ce message”) : faible $= \mathsf{negl}(\lambda)$
- **Problème de décision** : l’adversaire doit retrouver un **bit unique** b (e.g. “est-ce un chiffré de m_0 ou m_1 ?”) : faible $= 1/2 + \mathsf{negl}(\lambda)$

Focus

Définition (interchangeabilité)

Deux librairies $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont *interchangeables* (ou *égales*), noté $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_1$, si pour tout adversaire $\mathcal{A}$,

$$\Pr\left[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1\right] = \Pr\left[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1\right]$$

Goal

Parfois, nous avons besoin d'une version plus relaxée ou l'adversaire est borné (temps polynomial) :

Définition (avantage et indistinguabilité)

Deux librairies $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont **indistinguables** (noté $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$) si pour tout adversaire $\mathcal{A}$ calculatoirement borné (temps polynomial), **l'avantage** $\mathsf{Adv}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ de $\mathcal{A}$ est négligeable, avec:

$$\mathsf{Adv}_{\mathcal{A}}(\lambda) \coloneqq \left| \Pr\left[\mathcal{A}(1^\lambda) \diamond \mathcal{L}_0 = 1 \right] - \Pr\left[\mathcal{A}(1^\lambda) \diamond \mathcal{L}_1 = 1 \right] \right| \leq \mathsf{negl}(\lambda)$$

Goal

Parfois, nous avons besoin d'une version plus relaxée ou l'adversaire est borné (temps polynomial) :

Définition (avantage et indistinguabilité)

Deux librairies $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont **indistinguables** (noté $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$) si pour tout adversaire $\mathcal{A}$ calculatoirement borné (temps polynomial), **l'avantage** $\mathsf{Adv}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ de $\mathcal{A}$ est négligeable, avec:

Notion **asymptotique**!

$$\mathsf{Adv}_{\mathcal{A}}(\lambda) \coloneqq \left| \Pr\left[\mathcal{A}(1^\lambda) \diamond \mathcal{L}_0 = 1 \right] - \Pr\left[\mathcal{A}(1^\lambda) \diamond \mathcal{L}_1 = 1 \right] \right| \leq \mathsf{negl}(\lambda)$$

IND-CPA

Nous avons enfin tous les outils pour définir la sécurité d'un chiffrement !

Antoine Daniel va pouvoir définir la sécurité d'un chiffrement

IND-CPA

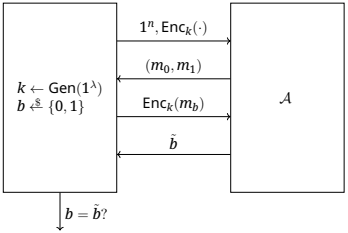
Definition (IND-CPA)

Un schéma de chiffrement $\Sigma = (\mathsf{Gen}, \mathsf{Enc}, \mathsf{Dec})$ est indistinguable contre des attaques à texte clair choisi (chosen-plaintext attack, **IND-CPA**) si:

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}}$		$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}}$
$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$ $\textsf{EAVESDROP}(m_L, m_R \in \mathcal{M})$: return $\mathsf{Enc}_k(m_L)$	$\approx$	$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$ $\textsf{EAVESDROP}(m_L, m_R \in \mathcal{M})$: return $\mathsf{Enc}_k(m_R)$

Various definitions of IND-CPA

On rencontre parfois cette autre définition **équivalente** de IND-CPA :



vs

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}}$

$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$

$\textsc{eavesdrop}(m_L, m_R \in \mathcal{M})$:

return $\mathsf{Enc}_k(m_L)$

$\approx$

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}}$

$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$

$\textsc{eavesdrop}(m_L, m_R \in \mathcal{M})$:

return $\mathsf{Enc}_k(m_R)$

- Au lieu d'un bit b, quand $b = 0$ on joue avec $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}}$, sinon avec $\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}}$.
- Dans notre définition, pas d'accès à l'oracle $\mathsf{Enc}_k(\cdot)$, mais on peut **le simuler** en appelant $\textsc{eavesdrop}(m, m)$ (le même message deux fois).
- Dans notre définition, aucune restriction sur le nombre d'appels à $\textsc{eavesdrop}$ (= notion plus forte, tandis que dans l'autre on n'a qu'un seul message $Enc_k(m_b)$). Mais c'est équivalent (l'avantage est multiplié par le nombre maximal de requêtes faites par $\mathcal{A}$, mais reste négligeable) : preuve par une suite de **hybrides sur le nombre de requêtes**.

Comment prouver l’INsécurité ?

Comment prouver l'INsécurité

Pour prouver l'**in**sécurité pour un jeu d'indistinguabilité entre $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$:

1. fournir un attaquant $\mathcal{A}$ donné
2. calculer $\varepsilon = |\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1]|$ (ε est toujours entre 0 et 1)
3. montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon > \frac{1}{\lambda^c}$

Comment prouver l'INsécurité

On considère le chiffrement $\mathsf{Gen}(1^\lambda) \coloneqq \textbf{return } 0$ et $\mathsf{Enc}_k(m) \coloneqq m \oplus 1 \ldots 1$. Ce schéma est il IND-CPA secure, et si non, quel attaquant peut distinguer les deux librairies correspondantes, et avec quel avantage ?

?

$$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}} \overset{?}{\approx} \mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}} \tag{1}$$

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}}$
$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$ EAVESDROP$(m_L, m_R \in \mathcal{M})$: return $\mathsf{Enc}_k(m_L)$

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}}$
$k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda)$ EAVESDROP$(m_L, m_R \in \mathcal{M})$: return $\mathsf{Enc}_k(m_R)$

Comment prouver l'INsécurité

On considère le chiffrement $\mathsf{Gen}(1^\lambda) \coloneqq \textbf{return } 0$ et $\mathsf{Enc}_k(m) \coloneqq m \oplus 1\ldots1$. Ce schéma est il IND-CPA secure, et si non, quel attaquant peut distinguer les deux librairies correspondantes, et avec quel avantage ?

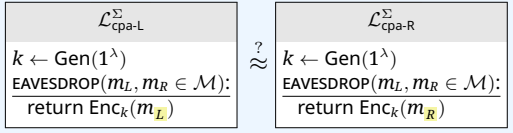
?

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-L}} \\ \hline k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda) \\ \underline{\textsc{eavesdrop}(m_L, m_R \in \mathcal{M}):} \\ \quad \text{return } \mathsf{Enc}_k(m_L)\end{array}} \overset{?}{\approx} \boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{cpa-R}} \\ \hline k \leftarrow \mathsf{Gen}(1^\lambda) \\ \underline{\textsc{eavesdrop}(m_L, m_R \in \mathcal{M}):} \\ \quad \text{return } \mathsf{Enc}_k(m_R)\end{array}} \tag{1}$$

1. $\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{A} \\ \hline c \coloneqq \textsc{eavesdrop}(0^\lambda) \\ \text{return } c \oplus 1\ldots1 \overset{?}{=} 0^\lambda\end{array}}$, avantage 0 (A), $1/2$ (B), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (C) ou 1 (D)
2. $\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{A} \\ \hline c \coloneqq \textsc{eavesdrop}(0^\lambda) \\ \text{return } c \oplus c \overset{?}{=} 0^\lambda\end{array}}$, avantage 0 (E), $1/2$ (F), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (G) ou $1 - \frac{1}{2^\lambda}$ (H)

Comment prouver l'INsécurité

On considère le chiffrement $\mathsf{Gen}(1^\lambda) \coloneqq \textbf{return } 0$ et $\mathsf{Enc}_k(m) \coloneqq m \oplus 1\ldots1$. Ce schéma est il IND-CPA secure, et si non, quel attaquant peut distinguer les deux librairies correspondantes, et avec quel avantage ?



(1)

?

1. $\mathcal{A}$: $c \coloneqq$ EAVESDROP(0^λ) ; return $c \oplus 1\ldots1 \overset{?}{=} 0^\lambda$, avantage 0 (A), $1/2$ (B), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (C) ou 1 (D ✓)
2. $\mathcal{A}$: $c \coloneqq$ EAVESDROP(0^λ) ; return $c \oplus c \overset{?}{=} 0^\lambda$, avantage 0 (E), $1/2$ (F), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (G) ou $1 - \frac{1}{2^\lambda}$ (H)

Comment prouver l'INsécurité

Quel attaquant peut distinguer ces deux librairies, et avec quel avantage ?

?

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-real}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^{\lambda})$:
$k \leftarrow \{0,1\}^{\lambda}$ // Σ.KeyGen
$c := k \,\&\, m$ // Σ.Enc
return c

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-rand}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^{\lambda})$:
$c \leftarrow \{0,1\}^{\lambda}$ // $\Sigma.C$
return c

Comment prouver l'INsécurité

Quel attaquant peut distinguer ces deux librairies, et avec quel avantage ?

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-real}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^\lambda)$:
$k \leftarrow \{0,1\}^\lambda$ // Σ.KeyGen
$c := k \,\&\, m$ // Σ.Enc
return c

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-rand}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^\lambda)$:
$c \leftarrow \{0,1\}^\lambda$ // $\Sigma.C$
return c

?

1. $\mathcal{A}$: $c := \textsc{ctxt}(0^\lambda)$; return $c = 0^\lambda$, avantage $1/4$ (A), $1/2$ (B), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (C) or $1 - \frac{1}{2^\lambda}$ (D)
2. $\mathcal{A}$: $c := \textsc{ctxt}(1^\lambda)$; return $c = 0^\lambda$, avantage $1/4$ (E), $1/2$ (F), $1/2 - \frac{1}{2^\lambda}$ (G) or $1 - \frac{1}{2^\lambda}$ (H)

Comment prouver l'INsécurité

Quel attaquant peut distinguer ces deux librairies, et avec quel avantage ?

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-real}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^{\lambda})$:
$k \leftarrow \{0,1\}^{\lambda}$ // Σ.KeyGen
$c := k \,\&\, m$ // Σ.Enc
return c

$\mathcal{L}^{\Sigma}_{\text{ots\$-rand}}$

$\textsc{ctxt}(m \in \{0,1\}^{\lambda})$:
$c \leftarrow \{0,1\}^{\lambda}$ // $\Sigma.C$
return c

?

1. $\mathcal{A}$: $c := \textsc{ctxt}(0^{\lambda})$; return $c = 0^{\lambda}$, avantage $1/4$ (A), $1/2$ (B), $1/2 - \frac{1}{2^{\lambda}}$ (C) or $1 - \frac{1}{2^{\lambda}}$ (D ✓)

2. $\mathcal{A}$: $c := \textsc{ctxt}(1^{\lambda})$; return $c = 0^{\lambda}$, avantage $1/4$ (E), $1/2$ (F), $1/2 - \frac{1}{2^{\lambda}}$ (G) or $1 - \frac{1}{2^{\lambda}}$ (H)

Pratiquer

Allez sur moodle faire les exercises (vous écrirez les distingueurs en python)

Sécurité asymptotique vs sécurité effective

En analyse théorique, la sécurité est asymptotique. En pratique : **comment choisir λ ?** Typiquement :

A. Étudier les meilleures attaques connues, **compter le nombre d'opérations T** et l'avantage ε (compromis temps/précision), et considérer que le nombre réel d'opérations est approximativement[1] T/ε.
   $\Rightarrow$ ce protocole offre une sécurité de $\log(T/\varepsilon)$ bits.

B. Noter que :
   - 2^{40} opérations sont très faciles à faire (petit cluster de Raspberry Pi)
   - 2^{60} opérations sont faisables avec un gros cluster CPU/GPU
   - 2^{80} opérations sont faisables avec un cluster d'ASICs (minage de bitcoin)
   - 2^{128} opérations = **très difficile** (diapo suivante)

[1] Plus de détails dans [Watanabe, Yasunaga 2021] et [Micciancio, Walter 2018].

Quelle est la taille de 2^{128} ?

Supposons que :

- le problème est parallélisable
- on a accès aux 500 meilleurs superordinateurs $=$ 10 000 000 000 GFLOPS (FLOPS = opérations flottantes par seconde)

Alors, il faudrait au total :

$$\frac{2^{128}}{10 \times 10^9 \times 10^9 \times 3600 \times 24 \times 365} \approx \boxed{1\,000\,000\,000\,000 \text{ années}}$$

(environ $4\times$ l'âge de la Terre)

Comment écrire des preuves de sécurité

Propriétés de base

Propriétés (toujours vraies en remplaçant $\approx$ par $\equiv$)

- **Transitivity**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \wedge (\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2) \Rightarrow \mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_2$
- **Chainage**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \Rightarrow ((\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_0) \approx (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_1))$

Preuves: exercice

Propriétés de base

Propriétés (toujours vraies en remplaçant $\approx$ par $\equiv$)

- **Transitivity**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \wedge (\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2) \Rightarrow \mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_2$
- **Chainage**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \Rightarrow ((\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_0) \approx (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_1))$

Preuve transitivité (inégalité triangulaire): On suppose que $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1 \wedge \mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$. Soit $\mathcal{A}$ un adversaire polyonmial. Alors par definition:

$$|\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1]| \leq \mathsf{negl}(\lambda) \wedge |\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_2 = 1]| \leq \mathsf{negl}(\lambda)$$

Mais

$$\begin{aligned}
&|\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1]| \\
&= |\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1] + \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_2 = 1]| \\
&\leq |\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1]| + |\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_2 = 1]| \\
&\leq \mathsf{negl}(\lambda) + \mathsf{negl}(\lambda) \leq \mathsf{negl}(\lambda)
\end{aligned}$$

Propriétés de base

Propriétés (toujours vraies en remplaçant $\approx$ par $\equiv$)

- **Transitivity**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \wedge (\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2) \Rightarrow \mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_2$
- **Chainage**: $(\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1) \Rightarrow ((\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_0) \approx (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_1))$

Preuve chainage : On suppose que $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$. soit $\mathcal{A}$ un adversaire polynomial. Nous voulons montrer que $(\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_0) \approx (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_1)$:

$$
\begin{aligned}
& |\Pr[\mathcal{A} \diamond (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_0) = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond (\mathcal{L} \diamond \mathcal{L}_2) = 1]| \\
\mathcal{A}' \coloneqq \mathcal{A} \diamond \mathcal{L} \quad & = |\Pr[(\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}) \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[(\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}) \diamond \mathcal{L}_1 = 1]| \\
& = |\Pr[\mathcal{A}' \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A}' \diamond \mathcal{L}_1 = 1]|
\end{aligned}
$$

puisque $\mathcal{A}$ est polynomial, c'est aussi le cas de $\mathcal{A}'$. Par conséquent, on utilisant $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$ l'expression ci-dessus est negl(λ). □

Méthodes

Six méthodes principales :

1. **Jeux hybrides** : Décomposer en une suite de jeux hybrides (pour faciliter les méthodes 2 à 6)
2. **Probabilités** : Calculer explicitement les probabilités, et montrer l'égalité ou borner la distance statistique (valable uniquement pour la sécurité statistique)
3. **Égalité** : Montrer que les deux jeux font exactement la même chose (cas particulier de la méthode 2)
   (par exemple : code simplement externalisé dans une sous-bibliothèque, code simplement "inlined"…)
4. **Réduction** : montrer que si on peut les distinguer, alors $\mathcal{A}$ peut être utilisé pour casser un problème difficile (factorisation de nombres…)
5. **Théorème/hypothèse** : utiliser théorème vu en cours ou une hypothèse
6. **Chaînage** : montrer $\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$, puis $\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 \approx \mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_2$

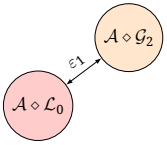
Nous détaillons maintenant les méthodes 1, 2, 3 et 4 (5 et 6 sont triviales).

Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**

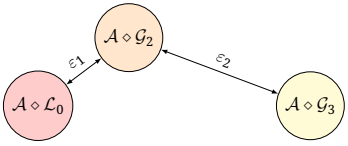
Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



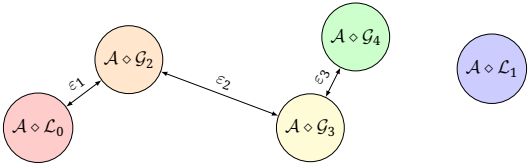
Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



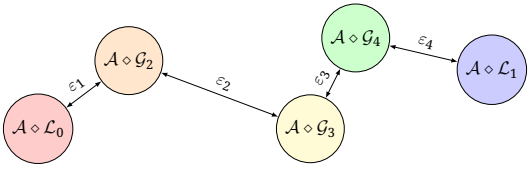
Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



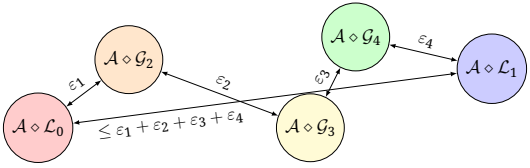
Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



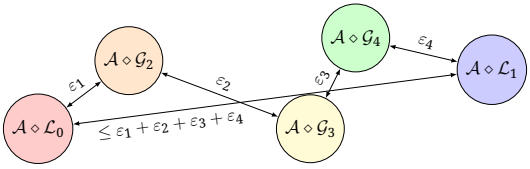
Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



Jeux hybrides

Preuve = séquence de jeux **hybrides**



Par transitivité, if $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_3 \approx \mathcal{G}_4 \approx \mathcal{L}_1$, then $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$.

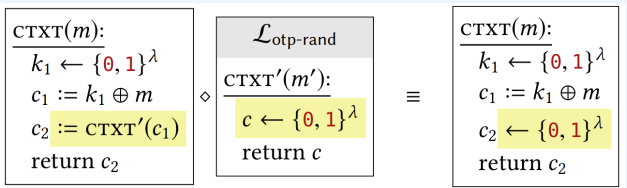
Égalité

On remarque simplement que deux bibliothèques font trivialement **exactement la même chose** (par exemple : externalizer un appel dans une sous-bibliothèque ou intégrer une sous-bibliothèque directement dans le code = “**inline**” à écrire dans les preuves)
ATTENTION: Assurez-vous que les variables sont toujours bien définies, sans collision de noms et bien **définies** (*scope*: une sous-bibliothèque ne peut pas faire référence à une variable de la bibliothèque parente)

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



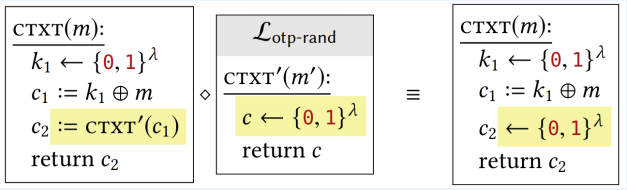
A Oui

B Non

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



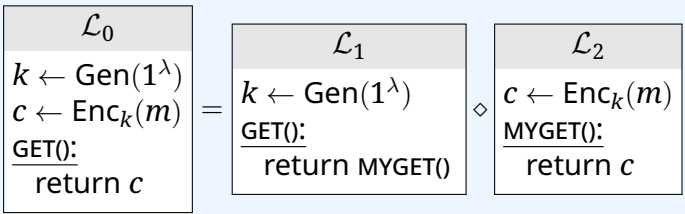
A. Oui ✔ Les variables sont bien définies dans leur scope, on a inliné une librairie

B. Non ✘

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



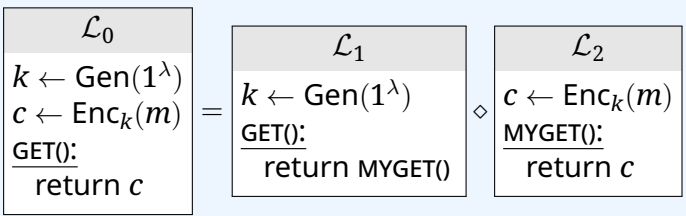
A Oui

B Non

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



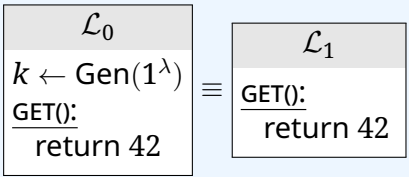
A. Oui ✗

B. Non ✓ k n'est pas défini dans $\mathcal{L}_2$

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



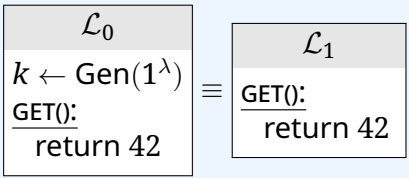
A

B

Égalité

Est-ce que ces deux librairies sont égales ?

?



A ✓ k n'est jamais utilisé, on peut donc l'enlever

B ✗

Méthode : calcul de probabilités

Théorème (One-Time-Pad à chiffré uniforme)

$\mathcal{L}_{\text{otp-real}}$		$\mathcal{L}_{\text{otp-rand}}$
$\mathsf{OTENC}(m \in \{0,1\}^\lambda)$:	$\equiv$	$\mathsf{OTENC}(m \in \{0,1\}^\lambda)$:
$k \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$		$c \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$
return $k \oplus m$		return c

Preuve Soit $m, \tilde{c} \in \{0,1\}^\lambda$. Dans $\mathcal{L}_{\text{otp-rand}}$, $\Pr[\mathsf{OTENC}(m) = \tilde{c}] = \frac{1}{2^\lambda}$ (tirage uniforme). Dans $\mathcal{L}_{\text{otp-real}}$:

$$\Pr[\mathsf{OTENC}(m) = \tilde{c}] = \Pr\left[k \oplus m = \tilde{c} \mid k \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda\right] = \Pr\left[\tilde{c} \oplus m = k \mid k \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda\right]$$

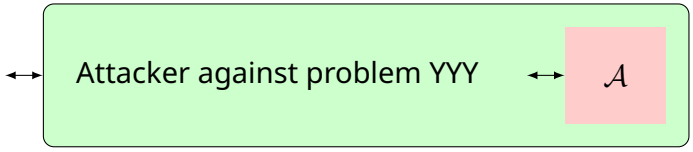
$$= \Pr\left[C = k \mid k \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda\right] = \frac{1}{2^\lambda} = \Pr[\mathsf{OTENC}(m) = \tilde{c}]$$

où $C \coloneqq \tilde{c} \oplus m$. Donc $\mathcal{L}_{\text{otp-real}} = \mathcal{L}_{\text{otp-rand}}$ □

Méthode : réduction

Toutes les méthodes précédentes correspondent à l'interchangeabilité (indistinguabilité statistique). Mais qu'en est-il de l'indistinguabilité **computationnelle** ? Soit on suppose directement que les deux bibliothèques sont difficiles à distinguer (il peut être nécessaire d'introduire une séquence hybride), soit :

Réduction !

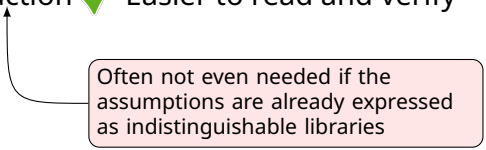


Idée: pour prouver que $\mathcal{L}_0 \approx \mathcal{L}_1$, supposons que $\mathcal{L}_0 \not\approx \mathcal{L}_1$, c'est-à-dire qu'il existe un adversaire polynomial $\mathcal{A}$ tel que $|\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_0 = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_1 = 1]|$. **On utilise $\mathcal{A}$ comme sous-routine pour casser un problème difficile (on calcule explicitement la probabilité de succès)** $\Rightarrow$ contradiction !

Method: reduction

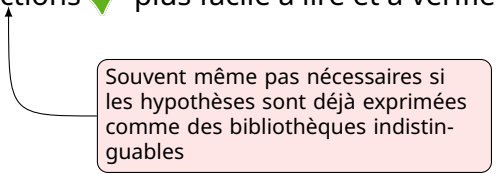
Option 1: single huge reduction: ✗ hard to write and read

Option 2: hybrids + small reduction ✓ Easier to read and verify



Méthode : réduction

Option 1 : une seule grande réduction : ✗ difficile à écrire et à lire
Option 2 : jeux hybrides + petites réductions ✓ plus facile à lire et à vérifier



Quelques théorèmes pratiques

Lemme des mauvais événements

Lemme des mauvais événements

Soit $\mathcal{L}_{\text{left}}$ et $\mathcal{L}_{\text{right}}$ deux librairies qui définissent une variable nommée bad, initialisée à 0. Si $\mathcal{L}_{\text{left}}$ et $\mathcal{L}_{\text{right}}$ ont des codes identiques sauf pour des parties atteignables seulement quand bad $= 1$ (e.g. à cause d'un "if bad $= 1$"), alors:

$$|\Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{left}} = 1] - \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{right}} = 1]| \leq \Pr[\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{left}} \text{ sets bad } = 1] \tag{2}$$

Preuve: Soit A_{left} l'événement "$\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{left}} = 1$", A_{right} l'événement "$\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{right}} = 1$", B_{left} l'événement $\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\textit{left}}$ sets bad $= 1$, et B_{right} l'événement $\mathcal{A} \diamond \mathcal{L}_{\text{left}}$ sets bad $= 1$, et $\bar{\cdot}$ la négation de l'événement
$\ddots$

$$\begin{aligned}
&|\Pr[A_{\text{left}}] - \Pr[A_{\text{right}}]| = |\Pr[B_{\text{left}}]\Pr[A_{\text{left}} \mid B_{\text{left}}] + \Pr[\bar{B}_{\text{left}}]\Pr[A_{\text{left}} \mid \bar{B}_{\text{left}}] \\
&- \Pr[B_{\text{right}}]\Pr[A_{\text{right}} \mid B_{\text{right}}] - \Pr[\bar{B}_{\text{right}}]\Pr[A_{\text{right}} \mid \bar{B}_{\text{right}}]| \\
&\leq \Pr[\bar{B}_{\text{left}}] \underbrace{|\Pr[A_{\text{left}} \mid \bar{B}_{\text{left}}] - \Pr[A_{\text{right}} \mid \bar{B}_{\text{right}}]|}_{=0 \text{ (same code when bad is 0)}} + \Pr[B_{\text{left}}] \underbrace{|\Pr[A_{\text{left}} \mid B_{\text{left}}] - \Pr[A_{\text{right}} \mid B_{\text{right}}]|}_{\leq 1} \\
&\leq \Pr[B_{\text{left}}]
\end{aligned}$$

Triangle ineq. & $\Pr[B_{\text{left}}] = \Pr[B_{\text{right}}]$ (code identique avant de modifier bad)

Application lemme des mauvais événements

Nous voulons montrer que $\mathcal{L}_{\text{left}}$: PREDICT(x): $s \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$; return $x \stackrel{?}{=} s$ $\approx$ $\mathcal{L}_{\text{right}}$: PREDICT(x): return false. Un étudiant a déjà écrit ces deux jeux hybrides: $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. Comment finir la preuve ?

$\mathcal{G}_1$:
```
bad := 0
PREDICT(x):
  s ←$ {0,1}^λ
  if x ?= s:
    bad := 1
  return false
```

$\mathcal{G}_2$:
```
bad := 0
PREDICT(x):
  s ←$ {0,1}^λ
  if x ?= s:
    bad := 1
    return true
  return false
```

?

A $\mathcal{L}_{\text{left}} = \mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2 = \mathcal{L}_{\text{right}}$

B $\mathcal{L}_{\text{left}} \approx \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 \approx \mathcal{L}_{\text{right}}$

C $\mathcal{L}_{\text{left}} = \mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_1 = \mathcal{L}_{\text{right}}$

D $\mathcal{L}_{\text{left}} \approx \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \approx \mathcal{L}_{\text{right}}$

Application lemme des mauvais événements

Nous voulons montrer que $\mathcal{L}_{\text{left}}$: PREDICT(x): $s \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$; return $x \stackrel{?}{=} s$ $\approx$ $\mathcal{L}_{\text{right}}$: PREDICT(x): return false. Un étudiant a déjà écrit ces deux jeux hybrides: $\mathcal{G}_1$: bad $\coloneqq 0$; PREDICT(x): $s \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$; if $x \stackrel{?}{=} s$: bad $\coloneqq 1$; return false et $\mathcal{G}_2$: bad $\coloneqq 0$; PREDICT(x): $s \xleftarrow{\$} \{0,1\}^\lambda$; if $x \stackrel{?}{=} s$: bad $\coloneqq 1$; return true; return false. Comment finir la preuve ?

?

- A $\mathcal{L}_{\text{left}} = \mathcal{G}_1 \approx \mathcal{G}_2 = \mathcal{L}_{\text{right}}$
- B $\mathcal{L}_{\text{left}} \approx \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 \approx \mathcal{L}_{\text{right}}$
- C $\mathcal{L}_{\text{left}} = \mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_1 = \mathcal{L}_{\text{right}}$ ✓ On utilise le lemme des mauvais événements pour montrer $\mathcal{G}_2 \approx \mathcal{G}_1$ ($\Pr[\text{bad} = 1] = \frac{1}{2^\lambda} = \text{negl}(\lambda)$)
- D $\mathcal{L}_{\text{left}} \approx \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \approx \mathcal{L}_{\text{right}}$

Conclusion

Conclusion

- Cryptographie indissociable des **modèles** de sécurité et **preuves**
- **Beaucoup de paramètres** à considérer (borné ou non, hypothèses calculatoires, hypothèses setup, asymptotique ou non, modèle de sécurité…)
- Prouver la sécurité d'un protocole revient à **montrer que deux librairies sont indistinguables**
- Un exemple est la propriété de sécurité **IND-CPA**
- Nous avons vu un ensemble de **méthodes pour faire des preuves de sécurité**
- À l'inverse, **montrer l'insécurité** revient à exhiber un distingueur efficace (temps polynomial) qui arrive à distinguer les deux librairies avec un avantage non négligeable.